

Prüfungsprotokoll
Theoretische Physik (im Physik-Hauptdiplom)
Prüfer: Prof. von Delft
Datum: 6. Juni 2007

#

Vorbemerkungen:

Bei der Anmeldung zur Diplomprüfung wollte Prof. von Delft keine Themenschwerpunkte festlegen und hat nur auf den offiziellen Stoffplan verwiesen. Allerdings sieht man aus den Prüfungsprotokollen, dass er seine festen Lieblingsfragen hat, die immer wieder drankommen.

Bei mir hat er hauptsächlich Quantenmechanik 1 geprüft und noch ein bisschen Statistische Physik; Elektrodynamik und Quantenmechanik 2 kam bei mir überhaupt nicht dran.

Wenn man, bevor man sich bei Prof. von Delft prüfen lässt die Fachschafts-Prüfungsprotokolle durcharbeitet und Prof. von Delft's Quantenmechanik 1 Skript liest, dann kann eigentlich nicht zu viel schief gehen.

Sein Skript aus dem Wintersemester 2004/2005, kann man übrigens (auch ohne Passwort) im Vorlesungsarchiv unter

http://www-alt.physik.uni-muenchen.de/intranet/archiv/WiSe04_05/TIII/ runterladen.

Ich meine, dass Prof. von Delft ein guter und empfehlenswerter Prüfer ist.

Zum Beginn der Prüfung hat Prof. von Delft gefragt, bei wem ich die Vorlesungen gehört habe (Elektrodynamik: Prof. Wolter, Quantenmechanik 1: Prof. Schenzle, Statistische Physik: Prof. Frey, Quantenmechanik 2: Prof. Fritsch).

Wie berechnet man den harmonischen Oszillator?

Am einfachsten mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren also

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\mp ip + m\omega x)$$

Wie sieht der Hamiltonian aus?

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \text{ wobei gilt } V(x) = \frac{1}{2} x^2 D \text{ wen } D \text{ die Federhärte ist und } D = m\omega^2.$$

Wie kann man den Hamiltonian mit Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren ausdrücken?

$$H = \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \text{ wobei } a_+ a_- = N \text{ der Zähloperator ist.}$$

Wie ist die Vertauschungs-Relation für die a_+ und a_- ?

$$[a_-, a_+] = 1$$

Wie kann man jetzt mit den a_+ und a_- die Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators bestimmen?

$a_+ |\psi_n\rangle$ ist proportional zu $|\psi_{n+1}\rangle$ und

$a_- |\psi_n\rangle$ ist proportional zu $|\psi_{n-1}\rangle$.

a_- angewandt auf die Grundzustandsfunktion $|\psi_0\rangle$ muss Null ergeben. Damit kann man $|\psi_0\rangle$ berechnen. Sobald man $|\psi_0\rangle$ kennt kann man auch die anderen Wellenfunktionen berechnen mit $|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}|\psi_0\rangle$.

Wie kann man zeigen, dass a_+ wirklich den Energie-Zustand des Oszillators um 1 erhöht?

Mit dem Zähloperator N :

$$Na_+|\psi_n\rangle = a_+a_-a_+|\psi_n\rangle = a_+(a_-a_+ - a_+a_- + a_+a_-)|\psi_n\rangle = \\ = a_+([a_-, a_+] + a_+a_-)|\psi_n\rangle = a_+(1 + N)|\psi_n\rangle = a_+(1 + n)|\psi_n\rangle = (1 + n)a_+|\psi_n\rangle$$

Also ergibt der Zähloperator angewandt auf $a_+|\psi_n\rangle$ genau $n+1$, also ist $a_+|\psi_n\rangle$ bis auf die Normierung gleich $|\psi_{n+1}\rangle$.

Wenn man jetzt die Grundzustandsfunktion $|\psi_0\rangle$ berechnet erhält man in Ortsdarstellung eine Gausskurve. Wie kann man ihre Breite größenordnungsmäßig durch Dimensionsanalyse abschätzen?

Man kann $\hbar\omega$ und die potentielle Energie des harmonischen Oszillators $\frac{1}{2}x^2m\omega^2$ weil sie beide die Dimension einer Energie haben gleichsetzen. Wenn man das nach x auflöst erhält man $x = \sqrt{2\frac{\hbar}{m\omega}}$ und das wird dann ungefähr die Breite der Gausskurve sein. (Der Faktor 2 unter der Wurzel spielt natürlich keine Rolle, weil es nur eine größenordnungsmäßige Abschätzung war.)

Wissen Sie, was kohärente Zustände sind?

Zustände des harmonischen Oszillators, die (wie die Grundzustandsfunktion) minimale Orts-/Impuls-Unschärfe haben. Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators bewegen sich zwar räumlich, weil sie keine Energie-Eigenzustände sind, und die Funktionen aus denen sie zusammengesetzt sind mit unterschiedlichen Frequenzen ihre Phasen ändern, sie behalten aber trotzdem ihre minimale Orts-/Impuls-Unschärfe. Sie sind Eigenfunktionen zum Absteigeoperator, also wenn $|\alpha\rangle$ ein kohärenter Zustand ist, dann gilt: $a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Probieren Sie mal, die kohärenten Zustände zu berechnen!

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle$$

Läuft die Summe wirklich von Null bis unendlich?

Weiß ich nicht, aber man kann ja einfach die Summe von Null bis unendlich laufen lassen und bei den Summanden, die man eigentlich nicht braucht das jeweilige c_n gleich Null setzen. (Das war zwar wohl nicht die Antwort die Prof. von Delft wollte, aber er hat sie akzeptiert.)

Wenn man jetzt die Formel $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle$ in $a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ einsetzt erhält man

$$a_- \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle$$

und damit kann man eine Rekursionsformel für die c_n berechnen.

(Das hat Prof. von Delft gereicht, die wirkliche Berechnung der c_n hat er gar nicht gewollt.)

Wie ist es, wenn ein Elektron im Atom Spin und Bahndrehimpuls hat?

Ist auf Clebsch-Gordon-Koeffizienten rausgelaufen, also:

Man kann entweder l, m, s, s_z annehmen oder l, s, j, j_z

Dann gilt:

$$|l, s, j, j_z\rangle = \sum_{m, s_z} |l, m, s, s_z\rangle \langle l, m, s, s_z | l, s, j, j_z\rangle \text{ wobei das } \sum_{m, s_z} |l, m, s, s_z\rangle \langle l, m, s, s_z| \text{ einer Eins}$$

entspricht und das $\langle l, m, s, s_z | l, s, j, j_z\rangle$ ein Clebsch-Gordon-Koeffizient ist.

Auf die Gleichung $|l, s, j, j_z\rangle = \sum_{m, s_z} |l, m, s, s_z\rangle \langle l, m, s, s_z | l, s, j, j_z\rangle$ kann man jetzt die Auf- oder

Absteigeoperatoren J_+ oder J_- anwenden und dann von links die entsprechenden Bras draufmultiplizieren. Damit kriegt man dann die entsprechenden Dreiecks-Rekursionsformeln und kann so die Clebsch-Gordon-Koeffizienten in Abhängigkeit von dem Start-Clebsch-Gordon-Koeffiziente A ausrechnen.



m ist betragsmäßig immer kleiner gleich l ,

s_z ist betragsmäßig immer kleiner gleich s und

$m+s_z$ ist betragsmäßig immer kleiner als $l+s$.

Dann könnte man die Koeffizienten noch normieren...

Das hat Prof. von Delft gereicht, und die Durchführung der Rechnung wollte er nicht.

Was ist das Wigner-Eckhardt-Theorem?

$$\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = \langle jk; mq | jk; j' m' \rangle \frac{\langle \alpha', j' | T^{(k)} | \alpha, j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

Also muss man nicht das Matricelement $\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$ für jedes q einzeln berechnen, sondern man muss nur einmal $\langle \alpha', j' | T^{(k)} | \alpha, j \rangle$ berechnen und dann den q abhängigen Clebsch-Gordon-Koeffizienten $\langle jk; mq | jk; j' m' \rangle$ hinmultiplizieren, den man aber eigentlich in einer Clebsch-Gordon-Tabelle ablesen kann.

$T_q^{(k)}$ ist ein Tensoroperator, wie ist ein Tensoroperator definiert?

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \text{ und}$$

$$[J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{h(h+1) - m(m \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}$$

(Hier hat Prof. von Delft extra gesagt, dass man solche Normierungsfaktoren wie das $\sqrt{h(h+1) - m(m \pm 1)}$ eigentlich nicht auswendig zu lernen braucht.)

Was ist die eigentliche Definition für Tensoroperator, aus der diese Vertauschungsrelationen folgen?

$$D^+(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q'} D_{qq'}^* T_{q'}^{(k)}$$

Wie ist die Bose- und die Fermi-Verteilungsfunktion?

$$n(p) = \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon_p - \mu)) \mp 1}$$
 wobei das Minus für Bosonen und das Plus für Fermionen gilt.

Die Verteilungsfunktion kann man herleiten, in dem man zuerst die großkanonische Zustandssumme berechnet, daraus dann das großkanonische Potential, und aus dem durch Ableiten nach μ die Gesamt-Teilchenzahl N .

Dann erhält man eine Formel in der Art $N = \sum_p ((irgendwas))$ und erkennt, dass das $((irgendwas))$ der Ausdruck für $n(p)$ ist.

Das hat gereicht, und das wirkliche Durchführen der Rechnung war nicht nötig.

Was ist die Landau-Theorie oder noch besser die Landau-Ginzburg-Theorie?

Man hat so etwas wie

$$f = a(T) + b \cdot (T - T_c) \cdot m^2 + c \cdot m^4 + d \cdot m + e \cdot (\vec{\nabla} m)^2$$

wobei b, c, d, e Konstanten sind. $a(T)$ ist eine temperaturabhängige Funktion.

f ist so etwas wie freie Energie pro Volumeneinheit (hier am Beispiel des Ferromagneten).

m ist der Ordnungsparameter (wie z.B. beim Ferromagneten).

d muss positiv sein, weil sonst geht der Ordnungsparameter gegen Unendlich um f zu minimieren und das gibt keinen Sinn.

b muss auch positiv sein, damit das ganze einen Sinn gibt.

Das $\vec{\nabla} m$ zeigt die Tendenz benachbarter Spins, sich parallel auszurichten.

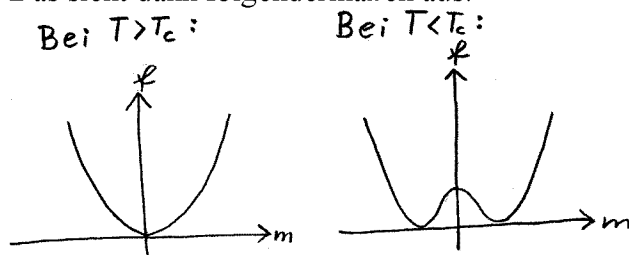
Wenn man die weniger wichtigen Terme weglässt erhält man

$$f = b \cdot (T - T_c) \cdot m^2 + c \cdot m^4$$

Also ist f eine Überlagerung aus einer Parabel die wie m^2 geht und somit für kleine m dominiert und einer zweiten Parabel die wie m^4 geht und somit für große m dominiert.

Die Parabel mit m^4 geht immer nach oben, die mit m^2 geht für $T > T_c$ auch nach oben, aber für $T < T_c$ nach unten.

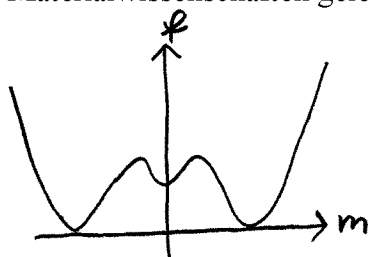
Das sieht dann folgendermaßen aus:



Weil f minimiert wird sieht man, dass der Ordnungsparameter für $T > T_c$ Null und für $T < T_c$ ungleich Null wird.

Man kann in der Entwicklung auch zu noch höheren Potenzen von m gehen, wie z.B.

$f = b \cdot (T - T_c) \cdot m^2 + c \cdot m^4 + g \cdot m^6$ wobei dann $g > 0$ sein muss (c darf jetzt negativ sein), und das kann man z.B. zum Beschreiben von ferroelastischen Stoffen verwenden (hab ich in Materialwissenschaften gelernt). Damit kann man dann auch solche Funktionen erzeugen:



Prof. von Delft hat noch erwähnt, das Ginzburg mit der Landau-Ginzburg-Theorie die Supraleitung berechnen konnte, und dafür einen komplexen Ordnungsparameter eingeführt hat.

(Was jetzt konkret der Unterschied zwischen Landau-Theorie und Landau-Ginzburg-Theorie ist hat Prof. von Delft nicht verlangt.)

Was ist Bose-Einstein-Kondensation?

Makroskopische Besetzung des Zustandes (im Impulsraum) mit der niedrigsten Energie.

Der Anteil der Teilchen, die im niedrigsten Zustand sind ist $1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$

Wie kann man das berechnen?

Im normalen Nicht-Bose-Einstein-Fall gilt:

$$N = \sum_p n_p = \sum_p \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon_p - \mu)) - 1} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon_p - \mu)) - 1} =$$

$$= \frac{V \cdot 4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_p) \exp(-\beta\mu) - 1} = \dots$$

(Statt dem Volumen V hab ich versehentlich einen unsinnigen Entartungsfaktor in die Formel geschrieben, was aber Prof. von Delft nicht weiter gestört hat, weil es ihm anscheinend nur um die Form der Formel ging.)

Das $\exp(-\beta\mu)$ ist gleich z^{-1} wobei z die Fugazität ist.

Wenn man das obige Integral berechnet kommt dann irgendwas mit $g_{3/2}(z)$ raus.

Im Bose-Einstein-Fall muss man die Teilchen im Grundzustand einzeln behandeln, also $N = N_0 + N_{\text{nicht } 0}$ wobei N die Gesamt-Zahl der Teilchen ist, N_0 ist die Zahl der Teilchen im Grundzustand und $N_{\text{nicht } 0}$ ist die Zahl der Teilchen, die nicht im Grundzustand sind.

Für $N_{\text{nicht } 0}$ setzt man dann den Ausdruck ein, den man oben erhalten hätte, wenn man das

$$\frac{V \cdot 4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_p) \exp(-\beta\mu) - 1}$$

berechnet hätte, das ergibt dann $N \cdot (\text{irgendwas})$.

Also erhält man die Gleichung

$$N = N_0 + N_{\text{nicht } 0} = N_0 + N \cdot (\text{irgendwas})$$

und das kann man dann nach N_0 auflösen.

Diese Beschreibung hat Prof. von Delft dann gereicht, und er hat nicht verlangt, dass ich es wirklich durchrechne.

Wie kann man ungefähr die Temperatur T_C abschätzen, unterhalb von der Bose-Einstein-Kondensation auftritt?

Das ist die Temperatur, bei der $z=1$ ist.

Wie kann man es anschaulicher machen, indem man Größen gleichsetzt?

Ich habe vorgeschlagen man setzt $k_B T_C$ mit der Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand gleich.

Das könnte vielleicht funktionieren, aber es geht noch einfacher?

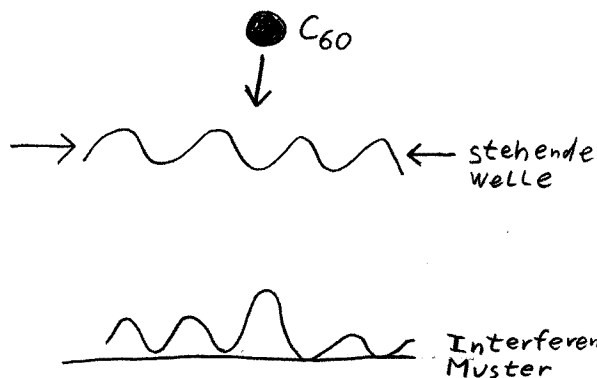
Man schaut, wann die De-Broglie-Wellenlänge gleich dem Teilchenabstand ist. Sobald die De-Broglie Wellenlänge größer als der Abstand der Teilchen ist wird es Bose-Einstein-Kondensation geben. Also muss ungefähr bei $T = T_C$ gelten $v = \lambda^3$ wobei $v = V/N$ das

(gegebene) Volumen pro Teilchen und $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{mk_B T}}$ die De-Broglie Wellenlänge ist.

Ob man $v = \lambda^3$ oder $v = \frac{4\pi}{3} \lambda^3$ oder irgendwelche anderen Vorfaktoren benutzt ist egal, weil es nur um eine grobe Abschätzung geht.

Die De-Broglie-Wellenlänge folgt aus $k_B T \approx E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{(\hbar \frac{2\pi}{\lambda})^2}{2m}$, wobei eventuelle Vorfaktoren wie 3/2 vor dem $k_B T$ vernachlässigt wurden.

Jetzt noch eine letzte Frage, bei der wir zusammen eine Antwort suchen:



C₆₀ Moleküle werden aus einem Ofen bei ca. 700 K auf eine stehende Welle geschossen, die hier als "Gitter" dient. Dann erhält man am Schirm ein Interferenzmuster.

Wenn man jetzt die Temperatur weiter erhöht verschwindet das Interferenzmuster. Wie kann man das erklären?

Mit ziemlich viel Hilfe durch Prof. von Delft bin ich nach längerem Rumprobieren darauf gekommen, dass bei höheren Temperaturen das C₆₀ in einem hoch angeregten Zustand ist. Das C₆₀ kann dann unter Aussendung eines Photons in einen niedrigeren Zustand übergehen. Wenn man die Temperatur erhöht, wird das C₆₀ stärker angeregt, also sendet es energiereichere Photonen aus, die dann eine kürzere Wellenlänge haben.

Wenn man dann so ein ausgesandtes Photon detektiert, weiß man ungefähr wo das Photon ausgesandt wurde, und also muss das C₆₀ Atom an der Stelle gewesen sein, wo das Photon ausgesandt wurde. Allerdings kann man diese Position nur ungefähr auf eine Wellenlänge des Photons genau messen.

Das heißt insgesamt je höher die Temperatur ist, desto genauer kann man die Position des C₆₀ bestimmen.

Sobald die Temperatur hoch genug ist, kann man die Position des C₆₀ auf weniger als einen "Spaltabstand" des "Gitters" genau bestimmen. Also weiß man, durch welchen "Spalt" das C₆₀ geflogen ist. Dann muss das Interferenzmuster verschwinden, weil Interferenz gibt es nur dann, wenn man nicht weiß, durch welchen "Spalt" das C₆₀ geflogen ist.